

Tangle with Categories

Basile Pillet
sous la direction de Ross Street¹

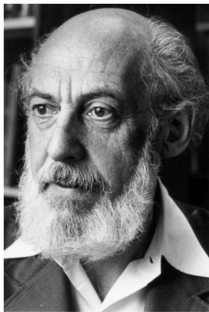
Juin-Août 2011

1. Emeritus Professor of Mathematics, Macquarie University, N.S.W. Australia 

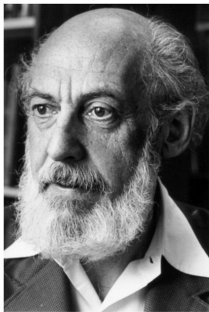
Have you met Saunders Mac Lane?



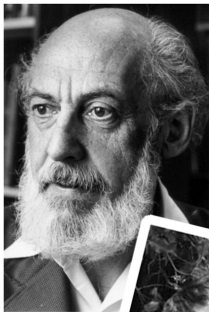
Have you met Saunders Mac Lane?



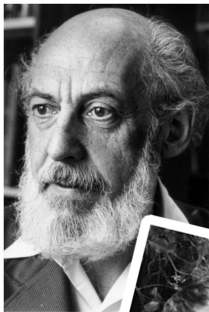
Have you met Saunders Mac Lane?



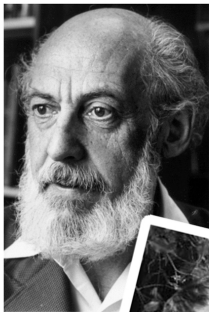
Have you met Saunders Mac Lane?



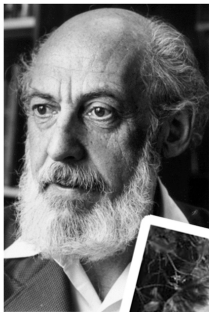
Have you met Saunders Mac Lane?



Have you met Saunders Mac Lane?



Have you met Saunders Mac Lane?



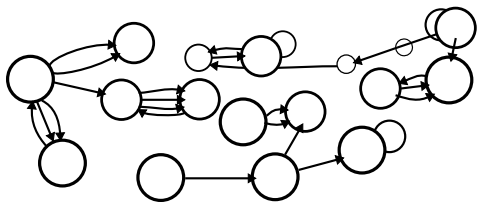
Have you met Saunders Mac Lane?

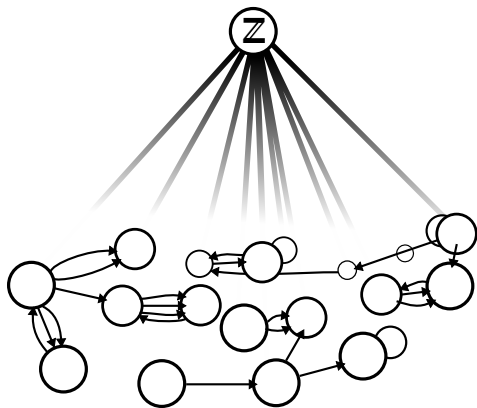


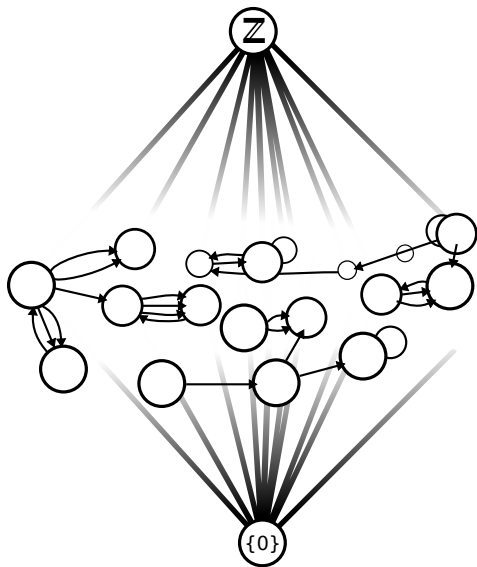
- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 Catégorie Monoidale
 - Definition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - Groupe de Tresses
 - Catégorie des tresses
 - Universalité-liberté
 - Application :
- 4 Conclusion

- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 Catégorie Monoidale
 - Definition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - Groupe de Tresses
 - Catégorie des tresses
 - Universalité-liberté
 - Application :
- 4 Conclusion

- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 Catégorie Monoidale
 - Definition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - Groupe de Tresses
 - Catégorie des tresses
 - Universalité-liberté
 - Application :
- 4 Conclusion







Définition (Categorie)

Une *Categorie* est un graphe $A \rightrightarrows O$ munit de :

- Pour tout objet a , une flèche $1_a : a \rightarrow a$.

tels que :

Définition (Categorie)

Une *Categorie* est un graphe $A \rightrightarrows O$ munit de :

- Pour tout objet a , une flèche $1_a : a \rightarrow a$.
- Pour tout triplet d'objets (a, b, c) , une application $\circ : \text{Hom}(a, b) \times \text{Hom}(b, c) \rightarrow \text{Hom}(a, c)$ où $\text{Hom}(x, y) = \{f \in A \mid \text{domain } f = x \text{ and codomain } f = y\}$. (on note $\circ(f, g)$ par $g \circ f$ ou simplement gf)

tels que :

Définition (Categorie)

Une *Categorie* est un graphe $A \rightrightarrows O$ munit de :

- Pour tout objet a , une flèche $1_a : a \rightarrow a$.
- Pour tout triplet d'objets (a, b, c) , une application $\circ : \text{Hom}(a, b) \times \text{Hom}(b, c) \rightarrow \text{Hom}(a, c)$ où $\text{Hom}(x, y) = \{f \in A \mid \text{domain } f = x \text{ and codomain } f = y\}$. (on note $\circ(f, g)$ par $g \circ f$ ou simplement gf)

tels que :

- Pour $f : a \rightarrow b$, on a $1_b \circ f = f = f \circ 1_a$.

Définition (Categorie)

Une *Categorie* est un graphe $A \rightrightarrows O$ munit de :

- Pour tout objet a , une flèche $1_a : a \rightarrow a$.
- Pour tout triplet d'objets (a, b, c) , une application $\circ : \text{Hom}(a, b) \times \text{Hom}(b, c) \rightarrow \text{Hom}(a, c)$ où $\text{Hom}(x, y) = \{f \in A \mid \text{domain } f = x \text{ and codomain } f = y\}$. (on note $\circ(f, g)$ par $g \circ f$ ou simplement gf)

tels que :

- Pour $f : a \rightarrow b$, on a $1_b \circ f = f = f \circ 1_a$.
- Pour tout f, g et h flèches satisfaisant $\text{codomain } f = \text{domain } g$ et $\text{codomain } g = \text{domain } h$, on a $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 Catégorie Monoidale
 - Definition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - Groupe de Tresses
 - Catégorie des tresses
 - Universalité-liberté
 - Application :
- 4 Conclusion

Définition (Foncteur)

Un foncteur F d'une catégorie A vers une catégorie B est la donnée de plusieurs fonctions (que l'on notera toujours F) :

- Une de l'ensemble des objets de A dans l'ensemble des objets de B .

Tels que : Pour toute paire de flèches composables (f, g) ,
 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Définition (Foncteur)

Un foncteur F d'une catégorie A vers une catégorie B est la donnée de plusieurs fonctions (que l'on notera toujours F) :

- Une de l'ensemble des objets de A dans l'ensemble des objets de B .
- Une famille $(F_{a,a'})_{a,a' \in A}$ de fonctions $\text{Hom}(a, a') \rightarrow \text{Hom}(Fa, Fa')$

Tels que : Pour toute paire de flèches composables (f, g) ,
 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Définition (Foncteur)

Un foncteur F d'une catégorie A vers une catégorie B est la donnée de plusieurs fonctions (que l'on notera toujours F) :

- Une de l'ensemble des objets de A dans l'ensemble des objets de B .
- Une famille $(F_{a,a'})_{a,a' \in A}$ de fonctions $\text{Hom}(a, a') \rightarrow \text{Hom}(Fa, Fa')$

Tels que : Pour toute paire de flèches composables (f, g) ,
 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Définition (Foncteur)

Un foncteur F d'une catégorie A vers une catégorie B est la donnée de plusieurs fonctions (que l'on notera toujours F) :

- Une de l'ensemble des objets de A dans l'ensemble des objets de B .
- Une famille $(F_{a,a'})_{a,a' \in A}$ de fonctions $\text{Hom}(a, a') \rightarrow \text{Hom}(Fa, Fa')$

Tels que : Pour toute paire de flèches composables (f, g) ,
 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Les foncteurs sont les morphismes de catégories.

Définition (Foncteur)

Un foncteur F d'une catégorie A vers une catégorie B est la donnée de plusieurs fonctions (que l'on notera toujours F) :

- Une de l'ensemble des objets de A dans l'ensemble des objets de B .
- Une famille $(F_{a,a'})_{a,a' \in A}$ de fonctions $\text{Hom}(a, a') \rightarrow \text{Hom}(Fa, Fa')$

Tels que : Pour toute paire de flèches composables (f, g) ,
 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Les foncteurs sont les morphismes de catégories.

Le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Set}$ est le foncteur qui à un anneau associe l'ensemble sous-jacent et à un homomorphisme d'anneaux associe la fonction sous-jacente (qui est une flèche de la catégorie **Set**).

Une transformation naturelle entre deux foncteurs $T, S : A \rightarrow B$ est la donnée d'une famille de morphismes $\tau_a : T(a) \rightarrow S(a)$ pour a objet de A

Une transformation naturelle entre deux foncteurs $T, S : A \rightarrow B$ est la donnée d'une famille de morphismes $\tau_a : T(a) \rightarrow S(a)$ pour a objet de A telle que si $f : a \rightarrow a'$ est un morphisme dans A alors le diagramme suivant est commutatif :

Une transformation naturelle entre deux foncteurs $T, S : A \rightarrow B$ est la donnée d'une famille de morphismes $\tau_a : T(a) \rightarrow S(a)$ pour a objet de A telle que si $f : a \rightarrow a'$ est un morphisme dans A alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T(a) & \xrightarrow{\tau_a} & S(a) \\ \downarrow T(f) & & \downarrow S(f) \\ T(a') & \xrightarrow{\tau_{a'}} & S(a') \end{array}$$

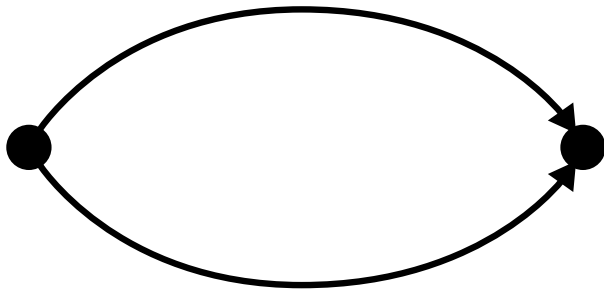
Ce qui peut s'exprimer par $T(f)\tau_{a'} = \tau_a S(f)$.

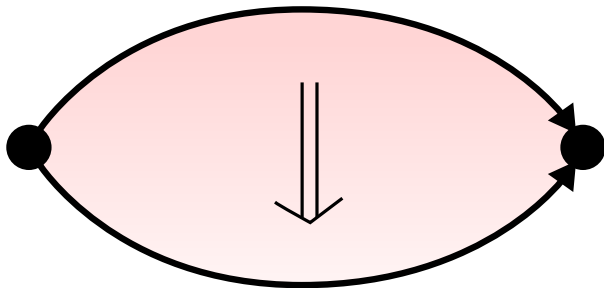
Une transformation naturelle entre deux foncteurs $T, S : A \rightarrow B$ est la donnée d'une famille de morphismes $\tau_a : T(a) \rightarrow S(a)$ pour a objet de A telle que si $f : a \rightarrow a'$ est un morphisme dans A alors le diagramme suivant est commutatif :

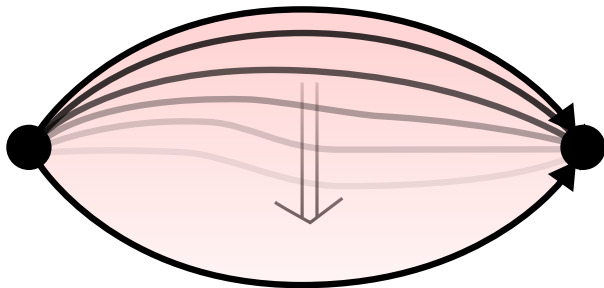
$$\begin{array}{ccc} T(a) & \xrightarrow{\tau_a} & S(a) \\ \downarrow T(f) & & \downarrow S(f) \\ T(a') & \xrightarrow{\tau_{a'}} & S(a') \end{array}$$

Ce qui peut s'exprimer par $T(f)\tau_{a'} = \tau_a S(f)$.
Les transformations naturelles sont les morphismes de foncteurs.









- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 **Catégorie Monoidale**
 - Definition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - Groupe de Tresses
 - Catégorie des tresses
 - Universalité-liberté
 - Application :
- 4 Conclusion

- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 Catégorie Monoidale
 - Definition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - Groupe de Tresses
 - Catégorie des tresses
 - Universalité-liberté
 - Application :
- 4 Conclusion

Définition (Catégorie monoïdale)

Une *catégorie monoïdale* est donnée par :

- Une catégorie M .

qui satisfassent :

Définition (Catégorie monoïdale)

Une *catégorie monoïdale* est donnée par :

- Une catégorie M .
- Un foncteur $\otimes : M \times M \rightarrow M$

qui satisfassent :

Définition (Catégorie monoïdale)

Une *catégorie monoïdale* est donnée par :

- Une catégorie M .
- Un foncteur $\otimes : M \times M \rightarrow M$
- Un objet $I \in M$ (appelé neutre)

qui satisfassent :

Définition (Catégorie monoïdale)

Une *catégorie monoïdale* est donnée par :

- Une catégorie M .
- Un foncteur $\otimes : M \times M \rightarrow M$
- Un objet $I \in M$ (appelé neutre)
- Une collection naturelle d'isomorphismes $\alpha_{a,b,c} : a \otimes (b \otimes c) \xrightarrow{\sim} (a \otimes b) \otimes c$ indexée par les triplets d'objets (a, b, c) .

qui satisfassent :

Définition (Catégorie monoïdale)

Une *catégorie monoïdale* est donnée par :

- Une catégorie M .
- Un foncteur $\otimes : M \times M \rightarrow M$
- Un objet $I \in M$ (appelé neutre)
- Une collection naturelle d'isomorphismes $\alpha_{a,b,c} : a \otimes (b \otimes c) \xrightarrow{\sim} (a \otimes b) \otimes c$ indexée par les triplets d'objets (a, b, c) .
- Une collection naturelle d'isomorphismes $\lambda_a : I \otimes a \xrightarrow{\sim} a$ indexée par les objets $a \in M$.

qui satisfassent :

Définition (Catégorie monoïdale)

Une *catégorie monoïdale* est donnée par :

- Une catégorie M .
- Un foncteur $\otimes : M \times M \rightarrow M$
- Un objet $I \in M$ (appelé neutre)
- Une collection naturelle d'isomorphismes $\alpha_{a,b,c} : a \otimes (b \otimes c) \xrightarrow{\sim} (a \otimes b) \otimes c$ indexée par les triplets d'objets (a, b, c) .
- Une collection naturelle d'isomorphismes $\lambda_a : I \otimes a \xrightarrow{\sim} a$ indexée par les objets $a \in M$.
- Une collection naturelle d'isomorphismes $\rho_a : a \otimes I \xrightarrow{\sim} a$ indexée par les objets $a \in M$.

qui satisfassent :

Définition (Catégorie monoïdale)

Une *catégorie monoïdale* est donnée par :

- Une catégorie M .
- Un foncteur $\otimes : M \times M \rightarrow M$
- Un objet $I \in M$ (appelé neutre)
- Une collection naturelle d'isomorphismes $\alpha_{a,b,c} : a \otimes (b \otimes c) \xrightarrow{\sim} (a \otimes b) \otimes c$ indexée par les triplets d'objets (a, b, c) .
- Une collection naturelle d'isomorphismes $\lambda_a : I \otimes a \xrightarrow{\sim} a$ indexée par les objets $a \in M$.
- Une collection naturelle d'isomorphismes $\rho_a : a \otimes I \xrightarrow{\sim} a$ indexée par les objets $a \in M$.

qui satisfont :

- $\alpha_{A,B,C \otimes D} \circ \alpha_{A \otimes B,C,D} = (1_A \otimes \alpha_{B,C,D}) \circ \alpha_{A,B \otimes C,D} \circ (\alpha_{A,B,C} \otimes 1_D)$.

Définition (Catégorie monoïdale)

Une *catégorie monoïdale* est donnée par :

- Une catégorie M .
- Un foncteur $\otimes : M \times M \rightarrow M$
- Un objet $I \in M$ (appelé neutre)
- Une collection naturelle d'isomorphismes $\alpha_{a,b,c} : a \otimes (b \otimes c) \xrightarrow{\sim} (a \otimes b) \otimes c$ indexée par les triplets d'objets (a, b, c) .
- Une collection naturelle d'isomorphismes $\lambda_a : I \otimes a \xrightarrow{\sim} a$ indexée par les objets $a \in M$.
- Une collection naturelle d'isomorphismes $\rho_a : a \otimes I \xrightarrow{\sim} a$ indexée par les objets $a \in M$.

qui satisfont :

- $\alpha_{A,B,C \otimes D} \circ \alpha_{A \otimes B,C,D} = (1_A \otimes \alpha_{B,C,D}) \circ \alpha_{A,B \otimes C,D} \circ (\alpha_{A,B,C} \otimes 1_D)$.
- $(1_A \otimes \lambda_B) \circ \alpha_{A,I,B} = \rho_A \otimes 1_B$.

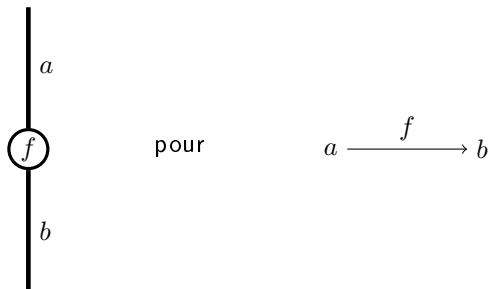
- La catégorie **Vect** $_{\mathbb{K}}$ des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, munit du produit tensoriel usuel $\otimes$ et de neutre $\mathbb{K}$.
Si V a pour base $(v_i)_i$ et W a pour base $(w_j)_j$ alors $(v_i \otimes w_j)_{i,j}$ forme une base de $V \otimes W$.

- La catégorie **Vect** $_{\mathbb{K}}$ des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, munit du produit tensoriel usuel $\otimes$ et de neutre $\mathbb{K}$.
Si V a pour base $(v_i)_i$ et W a pour base $(w_j)_j$ alors $(v_i \otimes w_j)_{i,j}$ forme une base de $V \otimes W$.
- La catégorie $(\mathbb{N}, +, 0)$ dont les objets sont les entiers naturels, les morphismes sont les inégalités $n \leq m$ et le produit tensoriel est l'addition usuelle. Ainsi $(a \leq b) \otimes (c \leq d) = (a + c) \leq (b + d)$

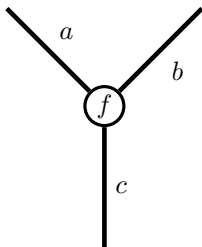
- La catégorie **Vect** $_{\mathbb{K}}$ des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, munit du produit tensoriel usuel $\otimes$ et de neutre $\mathbb{K}$.
Si V a pour base $(v_i)_i$ et W a pour base $(w_j)_j$ alors $(v_i \otimes w_j)_{i,j}$ forme une base de $V \otimes W$.
- La catégorie $(\mathbb{N}, +, 0)$ dont les objets sont les entiers naturels, les morphismes sont les inégalités $n \leq m$ et le produit tensoriel est l'addition usuelle. Ainsi $(a \leq b) \otimes (c \leq d) = (a + c) \leq (b + d)$
- On se restreindra aux catégories *Strictement monoïdales* ie α, λ et ρ sont des identités.

- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 Catégorie Monoidale
 - Définition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - Groupe de Tresses
 - Catégorie des tresses
 - Universalité-liberté
 - Application :
- 4 Conclusion

On notera



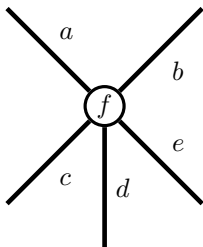
On notera



pour

$$a \otimes b \xrightarrow{f} c$$

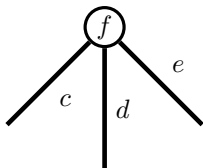
On notera



pour

$$a \otimes b \xrightarrow{f} c \otimes d \otimes e$$

On notera



pour

$$I \xrightarrow{f} c \otimes d \otimes e$$

- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 Catégorie Monoidale
 - Définition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - Groupe de Tresses
 - Catégorie des tresses
 - Universalité-liberté
 - Application :
- 4 Conclusion

Définition (Générateur de tresses)

Un *générateur de tresses* sur une catégorie monoidale $(M, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda)$ est une collection d'isomorphismes naturels $\gamma_{a,b} : a \otimes b \xrightarrow{\sim} b \otimes a$ indexés par les objets $a, b \in M$ satisfaisant (modulo α, ρ et λ) :

Définition (Générateur de tresses)

Un *générateur de tresses* sur une catégorie monoidale $(M, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda)$ est une collection d'isomorphismes naturels $\gamma_{a,b} : a \otimes b \xrightarrow{\sim} b \otimes a$ indexés par les objets $a, b \in M$ satisfaisant (modulo α, ρ et λ) :

$$\gamma_{a \otimes b, c} = (\gamma_{a, c} \otimes 1) \circ (1 \otimes \gamma_{b, c}) \quad \text{et} \quad \gamma_{a, b \otimes c} = (1 \otimes \gamma_{a, c}) \circ (\gamma_{a, b} \otimes 1)$$

Définition (Générateur de tresses)

Un *générateur de tresses* sur une catégorie monoidale $(M, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda)$ est une collection d'isomorphismes naturels $\gamma_{a,b} : a \otimes b \xrightarrow{\sim} b \otimes a$ indexés par les objets $a, b \in M$ satisfaisant (modulo α, ρ et λ) :

$$\gamma_{a \otimes b, c} = (\gamma_{a, c} \otimes 1) \circ (1 \otimes \gamma_{b, c}) \quad \text{et} \quad \gamma_{a, b \otimes c} = (1 \otimes \gamma_{a, c}) \circ (\gamma_{a, b} \otimes 1)$$

On notera $\gamma : a \otimes b \rightarrow b \otimes a$

Définition (Générateur de tresses)

Un *générateur de tresses* sur une catégorie monoidale $(M, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda)$ est une collection d'isomorphismes naturels $\gamma_{a,b} : a \otimes b \xrightarrow{\sim} b \otimes a$ indexés par les objets $a, b \in M$ satisfaisant (modulo α, ρ et λ) :

$$\gamma_{a \otimes b, c} = (\gamma_{a, c} \otimes 1) \circ (1 \otimes \gamma_{b, c}) \quad \text{et} \quad \gamma_{a, b \otimes c} = (1 \otimes \gamma_{a, c}) \circ (\gamma_{a, b} \otimes 1)$$

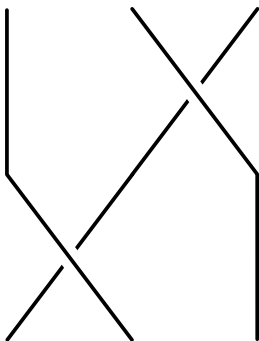
On notera $\gamma : a \otimes b \rightarrow b \otimes a$ par :



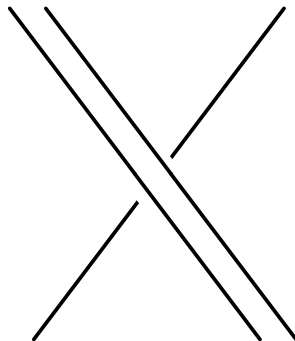
La propriété :

$$\gamma_{a \otimes b, c} = (\gamma_{a, c} \otimes 1) \circ (1 \otimes \gamma_{b, c})$$

Se traduit alors :



=



- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 Catégorie Monoidale
 - Definition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - Groupe de Tresses
 - Catégorie des tresses
 - Universalité-liberté
 - Application :
- 4 Conclusion

- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 Catégorie Monoidale
 - Définition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - **Groupe de Tresses**
 - Catégorie des tresses
 - Universalité-liberté
 - Application :
- 4 Conclusion

Définition (Groupe de tresses)

Le groupe de tresses à n brins peut être défini comme suit :

$$B_n = \langle \beta_1, \dots, \beta_{n-1} | (1) \text{ et } (2) \rangle$$

Où les relations sont

- 1 Pour tout $i < n$, on a $\beta_i \beta_{i+1} \beta_i = \beta_{i+1} \beta_i \beta_{i+1}$.

Définition (Groupe de tresses)

Le groupe de tresses à n brins peut être défini comme suit :

$$B_n = \langle \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \mid (1) \text{ et } (2) \rangle$$

Où les relations sont

- ① Pour tout $i < n$, on a $\beta_i \beta_{i+1} \beta_i = \beta_{i+1} \beta_i \beta_{i+1}$.
- ② Pour tout $i, j \leq n$ tels que $i - j > 1$, on a $\beta_i \beta_j = \beta_j \beta_i$.

Définition (Groupe de tresses)

Le groupe de tresses à n brins peut être défini comme suit :

$$B_n = \langle \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \mid (1) \text{ et } (2) \rangle$$

Où les relations sont

- ① Pour tout $i < n$, on a $\beta_i \beta_{i+1} \beta_i = \beta_{i+1} \beta_i \beta_{i+1}$.
- ② Pour tout $i, j \leq n$ tels que $i - j > 1$, on a $\beta_i \beta_j = \beta_j \beta_i$.

Définition (Groupe de tresses)

Le groupe de tresses à n brins peut être défini comme suit :

$$B_n = \langle \beta_1, \dots, \beta_{n-1} | (1) \text{ et } (2) \rangle$$

Où les relations sont

- ① Pour tout $i < n$, on a $\beta_i \beta_{i+1} \beta_i = \beta_{i+1} \beta_i \beta_{i+1}$.
- ② Pour tout $i, j \leq n$ tels que $i - j > 1$, on a $\beta_i \beta_j = \beta_j \beta_i$.

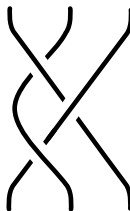
Définition (Groupe de permutations par générateur-relations)

$$\mathfrak{S}_n = \langle \beta_1, \dots, \beta_{n-1} | (1), (2) \text{ et } (3) \rangle$$

Avec

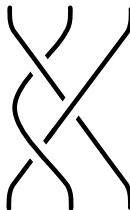
- ① Pour tout $i < n$, on a $\beta_i \beta_{i+1} \beta_i = \beta_{i+1} \beta_i \beta_{i+1}$.
- ② Pour tout $i, j < n$ tels que $i - j > 1$, on a $\beta_i \beta_j = \beta_j \beta_i$.
- ③ Pour tout $i < n$, $\beta_i^2 = 1$

Exemple de tresse de B_3 :









- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 Catégorie Monoidale
 - Définition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - Groupe de Tresses
 - **Catégorie des tresses**
 - Universalité-liberté
 - Application :
- 4 Conclusion

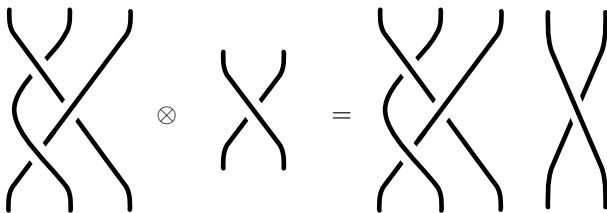
Définition (Catégorie des tresses)

La catégorie des tresses $\mathbb{B}$ a pour objets les entiers naturels $0, 1, 2, \dots$ et pour endomorphismes de n , les tresses du groupe B_n .

Définition (Catégorie des tresses)

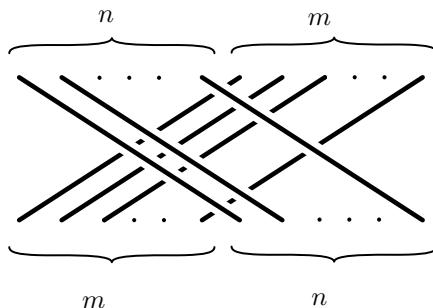
La catégorie des tresses $\mathbb{B}$ a pour objets les entiers naturels $0, 1, 2, \dots$ et pour endomorphismes de n , les tresses du groupe B_n .

On la munit du produit tensoriel suivant : $n \otimes m = n + m$ et qui agit sur les tresses comme suit :



Les equivalences α, ρ, λ sont des égalités.

On peut ajouter un *générateur de tresse* γ à la catégorie $\mathbb{B}$: c'est la famille d'isomorphismes $\gamma_{n,m} : n \otimes m \rightarrow m \otimes n$ donné par :



- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 Catégorie Monoidale
 - Définition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - Groupe de Tresses
 - Catégorie des tresses
 - **Universalité-liberté**
 - Application :
- 4 Conclusion

Proposition

La catégorie $\mathbb{B}$ est la catégorie monoidale librement tressée à partir d'un élément (le générateur en question est 1).

Proposition

La catégorie $\mathbb{B}$ est la catégorie monoidale librement tressée à partir d'un élément (le générateur en question est 1).

La partie "libre" implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aura un objet $1^{\otimes n}$ (que l'on peut noter n sans trop de problèmes).

Proposition

La catégorie $\mathbb{B}$ est la catégorie monoidale librement tressée à partir d'un élément (le générateur en question est 1).

La partie "libre" implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aura un objet $1^{\otimes n}$ (que l'on peut noter n sans trop de problèmes). De plus la partie "tressée" nous donne $\gamma_{1,1} : 2 \rightarrow 2$ que l'on peut noter :



Et qui engendre toute les tresse par composition et produit tensoriel.

Ce résultat peut se reformuler : Prenons une catégorie monoidale tressée $(M, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda)$ munit d'un *générateur de tresse* γ

Notons $\mathbf{BStMon}(\mathbb{B}, M)$ l'ensemble des foncteurs de $\mathbb{B}$ dans M qui préservent $\otimes$ et γ (en fait c'est une catégorie, avec pour morphisme les transformations naturelles).

Alors :

Proposition

Il y a une équivalence de catégories :

$$\mathbf{BStMon}(\mathbb{B}, M) \cong M$$

La liberté :

- Dans les groupes, le groupe libre engendré par un élément est $(\mathbb{Z}, +)$
On a $\text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \cong G$ et ce pour tout groupe G .

La liberté :

- Dans les groupes, le groupe libre engendré par un élément est $(\mathbb{Z}, +)$
On a $\text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \cong G$ et ce pour tout groupe G .
- Dans les monoïdes, le monoïde libre engendré par un élément est $(\mathbb{N}, +)$
On a $\text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\mathbb{N}, M) \cong M$ et ce pour tout monoïde M .

La liberté :

- Dans les groupes, le groupe libre engendré par un élément est $(\mathbb{Z}, +)$
On a $\text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \cong G$ et ce pour tout groupe G .
- Dans les monoïdes, le monoïde libre engendré par un élément est $(\mathbb{N}, +)$
On a $\text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\mathbb{N}, M) \cong M$ et ce pour tout monoïde M .
- Dans les espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, l'espace vectoriel libre engendré par un élément est $\mathbb{C}$
On a $\text{Hom}_{\mathbf{Vect}}(\mathbb{C}, E) \cong E$ et ce pour tout ev E .

Prenons $M = (\mathbf{Fvect}_{\mathbb{C}}, \otimes, \mathbb{C})$;

Prenons $M = (\mathbf{Fvect}_{\mathbb{C}}, \otimes, \mathbb{C})$; un foncteur $F : \mathbb{B} \rightarrow M$ qui préserve le produit scalaire et le générateur de tresse nous donne une application $F : B_n \rightarrow \mathcal{L}(F(n), F(n))$ qui respecte la composition. (ie. un morphisme de monoides)

Prenons $M = (\mathbf{Fvect}_{\mathbb{C}}, \otimes, \mathbb{C})$; un foncteur $F : \mathbb{B} \rightarrow M$ qui préserve le produit scalaire et le générateur de tresse nous donne une application $F : B_n \rightarrow \mathcal{L}(F(n), F(n))$ qui respecte la composition. (ie. un morphisme de monoides)

Comme B_n au départ est un groupe, l'image est un sous-groupe de $\mathcal{L}(F(n), F(n))$ et donc en notant $k = \dim F n$, on a un morphisme de groupe $B_n \rightarrow \mathcal{GL}_k(\mathbb{C})$.

Prenons $M = (\mathbf{Fvect}_{\mathbb{C}}, \otimes, \mathbb{C})$; un foncteur $F : \mathbb{B} \rightarrow M$ qui préserve le produit scalaire et le générateur de tresse nous donne une application $F : B_n \rightarrow \mathcal{L}(F(n), F(n))$ qui respecte la composition. (ie. un morphisme de monoides)

Comme B_n au départ est un groupe, l'image est un sous-groupe de $\mathcal{L}(F(n), F(n))$ et donc en notant $k = \dim F(n)$, on a un morphisme de groupe $B_n \rightarrow \mathcal{GL}_k(\mathbb{C})$.

Donc F nous donne une représentation de B_n , or on sait que F est caractérisé par un élément de M (qui se trouve être $F(1)$). Et donc on a une représentation de B_n pour chaque espace vectoriel de dimension finie.

- 1 Introduction
 - Que sont les catégories
 - Foncteurs et transformations naturelles
- 2 Catégorie Monoidale
 - Définition
 - Notation de Penrose
 - Générateur de Tresses
- 3 Tresses
 - Groupe de Tresses
 - Catégorie des tresses
 - Universalité-liberté
 - Application :
- 4 Conclusion

Conclusion

Conclusion

$\emptyset$

5 Remerciements

6 Bibliographie

- Ross Street évidemment ! Mais aussi Richard Gardner, Tom Brooker, Camell Cachour, Christine Hale et tout le département de math de Macquarie.

- Ross Street évidemment ! Mais aussi Richard Gardner, Tom Brooker, Camell Cachour, Christine Hale et tout le département de math de Macquarie.
- Gautier pour m'avoir généreusement déconcentré quand j'en avais besoin.

- Ross Street évidemment ! Mais aussi Richard Gardner, Tom Brooker, Camell Cachour, Christine Hale et tout le département de math de Macquarie.
- Gautier pour m'avoir généreusement déconcentré quand j'en avais besoin.
- Marie pour avoir insisté pour être placée dans mes remerciements.

- Ross Street évidemment ! Mais aussi Richard Gardner, Tom Brooker, Camell Cachour, Christine Hale et tout le département de math de Macquarie.
- Gautier pour m'avoir généreusement déconcentré quand j'en avais besoin.
- Marie pour avoir insisté pour être placée dans mes remerciements.
- Clement pour les bières que j'ai oublié de rembourser.

5 Remerciements

6 Bibliographie



Ross said so.



Steve Awodey.

Category Theory.
(early version), 2007.



André Joyal and Ross Street.

Lecture Note in Mathematics : Category Theory, volume 1488,
chapter An introduction to Tannaka duality and quantum groups.
Springer-Verlag, 1990.



C. Kassel.

Quantum groups.
Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1995.



Saunders Mac Lane.

Categories for the Working Mathematician.
Springer-Verlag, 1st edition, 1971.



Saunders Mac Lane.

Categories for the working mathematician.

Graduate texts in mathematics. Springer, 2nd edition, 1998.



Laurent Moret-Bailly.

Algèbre de base, 2010.



Ross Street.

From linear algebra to knot theory via categories.

Lecture on Category Theory and Abstract Geometry (Chaire de la Vallée-Poussin), May 2011.